The Chinese Journal of Economic Theory **1**, 201-218 (2004)

一个关于森系数多重分解的分析

Stéphane Mussard[1]
蒙彼利埃第一大学经济科学系
s-mussard@lameta.univ-montp1.fr

and

Kuan Xu[2]
Dalhousie 大学经济学系
kuan.xu@dal.ca

摘　要： Xu 和 Osberg (2001，2002) 对于森系数多重分解的研究，除了使森系数的理论性质更为清晰外，也使这个系数更便于经济学家、政策分析家和决策者使用和解释。基于 Mussard (2003) 对基尼系数中收入来源、子群分解最新的研究，我们认为对森系数及其组成部分的更进一步的分解是有可能的，并且在理论和实践中具有价值。

关键词： 基尼系数，森系数，收入来源分解，子群分解
JEL 分类号：C43, D1

1. 引言

对于经济学家，政策分析家和决策者，寻找适当的有关不平等和贫困的度量尺度具有重要意义。一方面，这些度量尺度可以用以描述不平等和贫困社会的真实状态。另一方面，这些度量尺度必须便于经济学家，政策分析家和决策者的理解和使用。

在过去的几十年里，关于不平等和贫困度量尺度的文献有了

---

[1] 蒙彼利埃第一大学经济科学系，海洋大道，Site de Richter - CS 79606 34960 蒙彼利埃 Cedex 2，法国
[2] 联系作者：经济学系 Dalhousie 大学，Halifax，NS，加拿大 B3H 3J5，电话: 902-494-6995 传真: 902-494-6917

显著的发展。其中重要进展之一是 Amartya Sen (1976) 提出贫困度量尺度。因此，这个度量尺度被称为森系数。由于它不但衡量通常使用的贫困率，而且衡量平均贫困差距(收入在贫困线下的平均下落)和贫困（不）平等程度，森系数在理论上比贫困率具有优越性。[1] 使用森系数不会导致得到像贫困率所引发的意想不到的消除贫困的政策措施，例如给贫困人群中最富有的人提供少量收入补贴，因为这可以降低贫困率，尽管这样的措施无助于降低平均贫困差距和减少贫困人口中的不平等程度。

更具体的讲，如 Xu 和 Osberg (2001，2002) 指出，森系数便于理解和应用。这是因为森系数可以视为贫困的 3 个度量的乘积：贫困的发生率(贫困比率)，贫困的深度(贫困差距)和贫困的平等程度 (用 1 减去贫困差距的基尼系数来度量)。 经济学家和政策分析家要问，森系数是否可以进一步按照社会群体(子群分解：年龄，教育，地域，等等)和收入来源(来源分解：劳动收入，投资收入，社会救济，幼儿补贴，等等)来分解？由于近来关于不平等和贫困度量尺度的研究，子群分解和来源分解显然是可能的。

不平等/贫困的度量尺度具有子群和来源分解的好处是使人们可以度量和理解每个组成部分对总的不平等/ 贫困程度的影响。 当然，这些分解的组成部分要同总的不平等/ 贫困程度有清晰且合乎逻辑的关系。而且，这些分解应有助于研究人员和政策制定者之间的交流。从技术角度讲，经济学家常常要求被分解的部分与相加的形式构成分解的整体。这一技术要求排除了很多广泛使用的不平等/贫困度量尺度，包括基尼系数和森系数[见 Shorrocks (1980)]。

但是，Lambert 和 Aronson (1993) 同许多学者一道总结和解释基尼系数的子群分解。而 Fei, Ranis and Kuo (1978) 讨论了来源分解。

Rao (1969)既考虑了基尼系数的子群分解也分析了来源分解。Silber (1989)则用矩阵方法来处理子群和来源分解。最近 Mussard(2003, 2004) 用一种新方法从两个不同但却又相关的角度来分解基尼系数，它使子群分解和来源分解之间有一个清晰的关连。众所周知，森系数有 3 个可分解的组成部分：贫困比率，平均贫困差距和 1 减去贫困差距的基尼系数。如同 Xu(2003a), 以及 Irvine 和 Xu(2003)所指出，这些组成部分都是可以进一步按子群分解。但是这些经济学家都没有讨论有关的来源分解，也没有讨论来源分解是如何与同子群分解相联系的。

因此，本文的目的就是要分析如何对森系数及其组成部分进行子群和来源分解。这种分析有助于发现收入不足的来源以及子群方面的特征。从技术层面上来讲，本文将简要回顾 Xu 和 Osberg (2001, 2002)和 Mussard (2003, 2004)的结论，以便发现这两种文献的内在联系。同时也希望对森系数理论上的新发现使森系数更加便于从理论上理解，在实践中应用。

本文结构如下：第 2 部分引入数学符号和贫困的识别。第 3 部分介绍本文将使用的有关文献。第 4 部分分析森系数的多重分解。第 5 部分评价森系数多重分解性质。第 5 部分给出结论。

2. 数学符号和贫困的识别

研究贫困问题的专家需要做出两个重要决定：(1) 识别贫困人群，即确立恰当的贫困线。(2) 找到衡量贫困的可靠方法， 对之人们会有不同见解但往往用人们能共同接受的基本判断，即公理，来选择。通常，前者则由社会计划者和管理者按实际情况而定。 对于后

者，在 1976 年森系数的发现之前，贫困通常是用贫困比率或者贫困率来衡量的。现在人们发现贫困比率虽然广泛使用，但却是一个有问题的度量贫困的尺度。它与森系数不同，只衡量贫困发生率却忽视了贫困的差距和不平等性。

为了进一步讨论，现在介绍一些数学符号。令 n 代表总人口的数量。q 代表生活在贫困线 z 以下的人口数量。总人口可以分为 K 个子群。而在第 k 个子群中，人口总数为 n_k，贫困人口为 q_k。总人口的贫困率为 $H=\frac{q}{n}$。第 k 子群的贫困率为 $H_k=\frac{q_k}{n_k}$。两者有这样的关系：$H=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k$。

考虑到第 i 个穷人的收入 y_i 和贫困线 z，我们可以对于所有贫困人口 q 定义贫困差距（也称作相对贫困差距比率）：

$$x_i = \begin{cases} \frac{z-y_i}{z}, \ \forall z > y_i \\ 0, \ \forall z \le y_i \end{cases} \tag{1}$$

因而贫困差距向量可以表达为：$x_p=(x_1,\dots,x_i,\dots,x_q)$。 设收入 y_i 有 M 个来源,即 $y_i=(y_i^1,\dots,y_i^m,\dots,y_i^M)$ 使得：

$$\sum_{m=1}^{M} y_i^m = y_i\ . \tag{2}$$

也就是说，个人总收入是各个部分收入（如劳动收入、投资收入、社会救助和儿童救助等）的总和。

判断某个人是否贫困，就看其个人收入 y_i 是否落到了贫困线以下。这个条件对任何子群中的个人都适用。但是当我们试着分析不同部分收入（即不同收入来源）不足部分对总收入的影响时，我们就要考虑并且接受一个条件，即贫困线可以根据不同的收入来源进行分解

$$\sum_{m=1}^{M} z^m = z \tag{3}$$

z^m 的值取决于这样一个价值判断，一般而论，个人从第 m 个收入来源至少应得到多少。实际上，由于每个人社会和经济条件的不同，我们不可能找到某一唯一的标准。至少 z 的分解可以为收入不同组成部分提供一个参照系。也就是说，z 的分解是由实证的方法决定并用抽样调查的数据来计算。

上述的观点可以用一个数字的例子加以说明。在一个有 2 个穷人的社会中，设贫困线 z=5，他们的收入有两种来源：劳动收入和社会救济，第一个和第二个穷人收入分别为：

$$y_1 = y_1^1 + y_1^2 = 3+1 = 4,$$

$$y_2 = y_2^1 + y_2^2 = 2+1 = 3.$$

为了让分解具有可操作性，在此例中需引入如下条件：

$$x_i = \frac{z - y_i}{z} = \frac{\left(z^1 - y_i^1\right) + \left(z^2 - y_i^2\right)}{z}. \tag{4}$$

问题是如何确定 z^1 和 z^2 的值。由于所有穷人的收入都低于 z，所以贫困人口的人均总收入也一定小于 z，而且收入各部分的均值之

和也必然小于 z。 因此，对 z 可以随意分解（即，依据某种理由，对 z 进行依照收入达到 z 水平的个人的收入来源分解），或者是按贫困人口的收入个部分的均值按比例来分解。第一种选择比较简单，即对 z 的分解是依照与贫困线收入相等的单个穷人收入的来源进行的分解。它使得在贫困线上的收入对分解收入来源十分重要。与第一种方式不同，第二种方式根据全部贫困人口收入结构来对 z 进行分解。具体地讲，在这个例子中令

$$\begin{aligned} z^1 &= z\left(\frac{y_1^1+y_2^1}{y_1+y_2}\right)=5\left(\frac{3+2}{4+3}\right)=3\times\frac{4}{7} \\ z^2 &= z\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1+y_2}\right)=5\left(\frac{1+1}{4+3}\right)=1\times\frac{3}{7}. \end{aligned} \tag{5}$$

这样使得, $z = z^1 + z^2 = 5$。那么有关收入来源贫困差距的一般形式为：

$$x_i^m = \frac{z^m - y_i^m}{z}, \tag{6}$$

这里 x_i^m 是第 i 个人的第 m 种收入来源的贫困差距, 它满足这样的关系： $\sum_{m=1}^{M} x_i^m = x_i$。对于 z 这样分解有如下有重要的特征：尽管 x_i 必定是非负的，其组成部分 x_i^m's 则可正可负或为零。这表明收入的第 m 个组成部分 y_i^m 可以小于，大于或等于收入第 m 个组成部分贫困线的基准 z^m。

这样，对第 k 个子群中的第 i 个个人的贫困差距可以定义为：

$$x_{ik} = \frac{z - x_{ik}}{z} \ . \tag{7}$$

而第 k 个子群中的第 i 个个人的第 m 种收入贫困差距则为：

$$x_{ik}^{m}=\frac{z^{m}-x_{ik}^{m}}{z}\ . \tag{8}$$

那么对于所有人口和第 k 个子群而言，平均贫困差距分别为：

$$\overline{x}_{p}=\sum_{i=1}^{q}\frac{x_{i}}{q}\ ,\ \ \overline{x}_{p(k)}=\sum_{i=1}^{q_k}\frac{x_{ik}}{q_k}, \tag{9}$$

以上两值有如下关系

$$\overline{x}_{p}=\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p(k)}\,. \tag{10}$$

3. 最近有关文献的发展

为了进一步讨论， 首先要简要回顾一下最近有关文献的发展。Xu 和 Osberg (2001, 2002), Irvine 和 Xu (2003a)提出了对森系数及其组成部分的多重分解。

$$S=H\overline{x}_{p}\left(1-G\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad S=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\times\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p(k)}\times\left(1-\left(G_w+G_b+G_t\right)\right) \tag{11}$$

这里,

G ：贫困人口的贫困差距的基尼系数

G_w ：k 个子群内部贫困差距不平等的影响

G_b ：k 个子群之间平均贫困差距之间的不平等的影响

G_t ： k 个子群之间限于相互重叠部分贫困差距不平等的影响

[见 Gini (1916), Dagum (1959, 1960, 1961, 1997a, 1997b)]。

注意到这里的 G_w，G_b，和 G_t 并不是本来意义上的基尼系数，而另一类不平等指标。具体的讲，这些指标是组内（子群内）加权平均基尼系数和组间（子群间）基尼系数。但是 Xu 和 Osberg (2001, 2002) 与 Irvine 和 Xu (2003a)并没有就此提出有关得来源分解。

尽管 Mussard (2003) 没有多重分解森系数，但是他却提出了基尼系数多重分解。换言之，他发现了基尼系数可以同时按来源和子群分解， 即：

$$G = \sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_b^m+G_t^m\right)= \sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right). \tag{12}$$

这里 G_{gb} 代表整体组间不平等。事实上，利用 Dagum's 方法(1997a), 我们可以有：

$$G_{gb}=G_b+G_t\,. \tag{13}$$

整体组间基尼系数 G_{gb},可以从完全意义上来衡量组间不平等。而 G_b, 仅仅衡量所有子群平均值之间的不平等。我们可以用这样的方法计算不同来源的 G_w, G_b, G_t 和 G_{gb} 各自的贡献。

贫困人口的贫困差距的基尼系数定义为：

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left|x_i-x_r\right|}{2\overline{x}_p q^2}, \tag{14}$$

这里 x_i $(i = 1,\ldots,q)$ 是第 i 个个人的贫困差距。贫困差距的基尼系数

可以表达为：

$$G=\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i+x_r-2\min\left\{x_i\ ,\ x_r\right\}\right)}{2\overline{x}_p q^2} \tag{15}$$

因为：

$$\left|x_i-x_r\right|=\left(x_i+x_r-2\min\left\{x_i\ ,\ x_r\right\}\right) \tag{16}$$

由于 $x_i=x_r,\ \left|x_i-x_r\right|=0$ **；也就是说，当** $x_i=x_r$ **时，我们无需分解这两个** x **，这样的条件使我们的分解与总体基尼系数一致。但是，如果** $x_i\neq x_r$**，我们可以这样分解** $2\min\left\{x_i\ ,\ x_r\right\}$**：**

$$\sum_{m=1}^{M}2x_{ir}^{*m}=2\min\left\{x_i\ ,\ x_r\right\} \tag{17}$$

这里 x_{ir}^{*m} **为一算子，它取** x_i **和** x_r **中最小低贫困差距（**x_i **或** x_r**），然后对其按** M **种收入来源进行分解。例如，如果** $x_i=\min\left\{x_i\ ,\ x_r\right\}$ **而且只有两种来源（**M=2**），那么就有** $x_i=x_i^1+x_i^2$ **和** $\sum_{m=1}^{M}2x_{ir}^{*m}=2(x_i^1+x_i^2)$**。因而贫困人口的贫困差距的基尼系数就可表示成：**

$$G=\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i^m+x_r^m-2x_{ir}^{*m}\right)}{2\overline{x}_p q^2}\right) \tag{18}$$

基尼系数所表示的不平等［式(18)］可分解为 M **种收入来源的影响。**

这些影响是相对于穷人贫困差距总体不平等而言每个组成部分的贡献。

根据 Dagum (1997a, 1997b)，贫困差距基尼系数可按 K 个子群分解：

$$G=\frac{\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qk}\left|x_{ik}-x_{rk}\right|\right)}{2\bar{x}_{p}q^{2}}+\frac{2\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qh}\left|x_{ik}-x_{rh}\right|\right)}{2\bar{x}_{p}q^{2}} \tag{19}$$

x_{ik} 是第 k 个子群中第 i 个人的贫困差距。所以（19）式中定义的基尼系数可表达为两个组成部分之和：

$$G=G_{w}+G_{gb} \tag{20}$$

这里(i) G_w 是 K 个子群中贫困差距不平等的影响。(ii) G_{gb} 是 K 子群间贫困差距不平等的影响。

现将前面讲两式结合，即将（18）式中基尼系数的来源分解代入（19）式中子群分解，有：

$$G=\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\sum_{k=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qk}\left(x_{ik}^{m}+x_{rk}^{m}-2x_{irk}^{*m}\right)\right)}{2\bar{x}_{p}q^{2}}\right)$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{2\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qk}\left(x_{ik}^{m}+x_{rh}^{m}-2x_{irkh}^{*m}\right)\right)}{2\overline{x}_{p}q^{2}}\right) \tag{21}$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\left(G_{w}^{m}+G_{gb}^{m}\right),$$

这里 x_{irkh}^{*m} 是 x_{ik}^{m} 和 x_{rh}^{m} 中的较小值， x_{irk}^{*m} 是 x_{ik}^{m} 和 x_{rk}^{m} 中的较小值。依上式，收入来源可分解为组内和组间各部分。式（21**）式表明基尼系数按来源和子群同时分解的可能性**[**见** Mussard (2003)]。**但需要说明，G_{w}^{m} 和 G_{gb}^{m} 并非原有意义上的基尼系数。事实上，他们是与基尼平均差成比例的量**[**见** Xu (2003b), p. 15]。

4. 森系数及其组成部分的多重分解的扩展

利用（13**）式可以将（**11**）式中的分解写成：**

$$S=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_{k}}{n}H_{k}\times\sum_{k=1}^{K}\frac{q_{k}}{q}\,\overline{x}_{p(k)}\times\left(1-\left(G_{w}+G_{gb}\right)\right). \tag{22}$$

讨论 1. 这里的基尼系数 $G_w+G_{gb} = G$ **衡量穷人贫困差距的不平等，而不是衡量收入的不平等。而且森系数的组成部分，**
$1-(G_w+G_{gb}) = 1-G$，**是衡量贫困差距的平等性，而不是贫困差距的不平等。**

命题 1. 如果收入和贫困线可按来源划分，那么贫困差距的基尼系数可以多重分解，且森系数也可以多重分解。

证明：由式(6), (12), (13) **和**(22)，**森系数可以写成：**

$$S=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\times\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p(k)}\times\left(1-\left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)\right). \tag{23}$$

这种多重分解对于研究者而言具有积极的作用，因为它使贫困的总指标可按来源和子群同时分解。令 G_e 为基尼平等系数，它是为传统的表示不平等的基尼系数的函数 $G_e = 1-G$ 。如果 G_e 可以按式（21）多重分解，那么就可以得到 G_e 的来源和子群对 G_e 影响。

命题 2. 基尼平等系数可以多重分解。

证明：基尼平等系数可以定义为：

$$G_e=1-G=\frac{2\overline{x}_p q^2-\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left|x_i-x_r\right|}{2\overline{x}_p q^2}. \tag{24}$$

分母可以写为：

$$2\overline{x}_p q^2=\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i+x_r\right) \tag{25}$$

那么，总的基尼平等系数写为：

$$G_e=1\text{-}G=\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i+x_r\right)-\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left|x_i-x_r\right|}{2\overline{x}_p q^2}. \tag{26}$$

注意，

$$A=1=\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i+x_r\right)}{2\overline{x}_p q^2} \tag{27}$$

为

$$B=\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left|x_i-x_r\right|}{2\overline{x}_p q^2} \tag{28}$$

的最大值。A 可按 K 个子群分解：

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q}\left(x_i+x_r\right)}{2\overline{x}_p q^2}=\frac{\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qk}\left(x_{ik}+x_{rk}\right)\right)}{2\overline{x}_p q^2}+\frac{2\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qh}\left(x_{ik}+x_{rh}\right)\right)}{2\overline{x}_p q^2} \tag{29}$$

且 A 可按 K 个子群和 M 种来源同时分解：

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qk}\left(x_{ik}^{m}+x_{rk}^{m}\right)\right)\right)}{2\overline{x}_p q^2}+\frac{\sum_{m=1}^{M}\left(2\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{qk}\sum_{r=1}^{qh}\left(x_{ik}^{m}+x_{rh}^{m}\right)\right)\right)}{2\overline{x}_p q^2}\\&=\sum_{m=1}^{M}A_w^m+\sum_{m=1}^{M}A_{gb}^m.\end{aligned} \tag{30}$$

因式（21）中 B 的多重分解，G_e 的多重分解可以写为：

$$\begin{aligned}G_e&=\overbrace{\sum_{m=1}^{M}A_w^m-\sum_{m=1}^{M}G_w^m}^{\sum_{m=1}^{M}G_{ew}^m}+\overbrace{\sum_{m=1}^{M}A_{gb}^m-\sum_{m=1}^{M}G_{gb}^m}^{\sum_{m=1}^{M}G_{egb}^m}\\&=\qquad G_{ew}\qquad+\qquad G_{egb}\,.\end{aligned} \tag{31}$$

所以基尼平等系数可以按来源和子群同时分解。这表明，第 m 个来

源对组内平等 G_{ew} **的影响以及组间平等** G_{egb} **的影响是可计算的。**

推论 1. 森系数的多重分解包括基尼平等系数的多重分解。

证明：显然地,

$$S=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\times\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}\times\left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_{ew}^m+G_{egb}^m\right)\right). \tag{32}$$

因此，可以计算第 m **个贫困差距来源在组内和组间对森系数的影响。**

5. 森系数多重分解的性质

命题 3. 森系数允许进一步对平均贫困差距的来源进行分解：

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\times\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}^m\times\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\times\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}^m\times\left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_{ew}^m+G_{egb}^m\right)\right).\end{aligned} \tag{33}$$

证明：给定

$$\bar{x}_p=\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_p^{(k)}\quad \text{和} \quad \bar{x}_{p(k)}=\sum_{i=1}^{qk}\frac{x_i}{q_k}=\sum_{i=1}^{qk}\frac{\sum_{m=1}^{M}x_i^m}{q_k}\quad , \tag{34}$$

有

$$\bar{x}_{p(k)}=\sum_{i=1}^{qk}\frac{x_i}{q_k}=\sum_{i=1}^{qk}\frac{\sum_{m=1}^{M}x_i^m}{q_k}\quad ,$$

即

$$\bar{x}_{p(k)}=\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\sum_{i=1}^{qk}x_i^m}{q_k}\right)=\sum_{m=1}^{M}\bar{x}_{p(k)}^m. \tag{35}$$

第 k **个子群的第** m **个来源的平均贫困差距是：**

$$\bar{x}_{p(k)}^{m}=\frac{\sum_{i=1}^{qk} x_i^m}{q_k} \quad . \tag{36}$$

那么

$$\bar{x}_p=\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)} \quad . \tag{37}$$

即

$$\bar{x}_p=\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\sum_{m=1}^{M}\bar{x}_{p(k)}^{m}$$

或

$$\bar{x}_p=\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}^{m} \,. \tag{38}$$

命题 4. 式（22）、（32）中给出的多重森系数分解允许森系数及其组成部分按随时间的变化进行分解。

证明：给定对数差分算子$\Delta x = \mathrm{Ln}x_t - \mathrm{Ln}x_{t-1}$，可以得出[见 Xu and Osberg (2001)]：

$$\Delta S=\Delta H+\Delta\bar{x}_p+\Delta\left(1-G\left(x_p\right)\right), \tag{39}$$

那么，

$$\begin{aligned}\Delta S&=\Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k+\Delta\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}^{m}+\Delta\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)\\&=\Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k+\Delta\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\bar{x}_{p(k)}^{m}+\Delta\left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_{ew}^m+G_{egb}^m\right)\right).\end{aligned} \tag{40}$$

命题 5. 根据一阶泰勒级数，森系数的随时间的变化与其各个组成部分随时间的变化有相加性的分解。

证明：

$$\Delta S = \text{Ln}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\right)_t - \text{Ln}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k\right)_{t-1}$$
$$+\text{Ln}\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p^{(k)}}^{m}\right)_t - \text{Ln}\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p^{(k)}}^{m}\right)_{t-1} \tag{41}$$
$$+\text{Ln}\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_t - \text{Ln}\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_{t-1}.$$

考虑到 Ln(1-X) ≅ -X (**一阶泰勒级数的近似)，有：**

$$\text{Ln}\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_t - \text{Ln}\left(1-\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_{t-1}$$
$$\cong -\left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_t + \left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_{t-1}. \tag{42}$$

那么，

$$\Delta S \cong \Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}H_k + \Delta\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k}{q}\,\overline{x}_{p^{(k)}}^{m} - \left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_t + \left(\sum_{m=1}^{M}\left(G_w^m+G_{gb}^m\right)\right)_{t-1}. \tag{43}$$

式(43)**给出了森系数随时间变化的相加性的多重分解。**

对命题 5 **的证明，特别是式**（43），**是值得注意的。贫困率和平均贫困差距的变化成与森系数的变化成正比。而贫困的不平等的变化同森系数的变化成反比。这表明，森系数的时间分解与文献中的转移支付原理相一致。**

6. **结论**

本文对森系数的分解作了进一步的扩展。第一，本文说明森系数可按收入子群和来源进行同时分解。第二，本文说明对森系数的这种分解可以推广到对该系数随时间变化的分解。第三，本文说明对该

系数的对数差分使相加性分解成为可能。第四，本文说明泰勒级数近似将基尼平等系数的多重分解转化为基尼不平等系数的多重分解。这说明贫困程度的变化也由其不平等的程度决定。

参考文献

Dagum, C., “Transvariazione fra più di due distribuzioni” , in C. Gini, eds., *Memorie di Metodologia Statistica* 2 (1959), Roma, Libreria Goliardica.

Dagum, C., “Teoria de la transvariacion, sus aplicaciones a la economia” ,*Metron* 20 (1960), 1-206.

Dagum, C., “Transvariacion en la hipotesis de varaibles aleatorias normales multidimensionales” ,*Proceedings of the International Statistical Institute* 38(4) (1961), 473-486, Tokyo.

Dagum, C., “A new approach to the decomposition of the Gini income inequality ratio” , *Empirical Economics* 22 (1997a), 515-531.

Dagum, C., “ Decomposition and interpretation of Gini and the generalized entropy inequality measures” ,*Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 157th Meeting (1997b), 200-205.

Fei, J.C.H., Ranis, G. and Kuo, S.W.Y, “ Growth and the family distribution of income by factor components” ,*Quarterly Journal of Economics* (1978), 17-53.

Gini, C., “ Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni” , (1916) in C. Gini, eds., *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica* (1954), 21-44.

Irvine, I. and Xu, K., “ Crime, punishment and the measurement of poverty in the United States 1979-1997” (2003), (mimeo), Department of Economics, Dalhousie University.

Lambert, P. J. and Aronson, J. R., “ Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited” ,*Economic Journal* 103 (1993), 1221-1227.

Mussard, S., “A new approach to the Gini decomposition by income sources and the Gini decomposition by subpopulations: a reconciliation” paper presented at the WIDER (2003), Helsinki, Finland.

Mussard, S., "The bidimensional Decomposition of the Gini Ratio. A Case Study: Italy", *Applied Economics Letters* (2004), forthcoming.

Rao, V. M., "Two decompositions of concentration ratio", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A (General) 132 (1969), 418-425.

Sen, A, " Poverty, an ordinal approach to measurement", *Econometrica* 44 (1976), 219-231.

Shorrocks, A. F., " The class of additively decomposable inequality measures", *Econometrica* 48 (1980), 613-625.

Silber, J., " Factor components, population subgroups and the computation of the Gini index of inequality", *Review of Economics and Statistics* 71 (1989), 107-115.

Xu, K., "Assimilation of immigrant household cohorts over time in Canada: an examination of the lower tail of income distributions" (2003a), (mimeo), Department of Economics, Dalhousie University.

Xu, K., " How has the literature on Gini's index evolved in the past 80 years?" (2003b), (mimeo), Department of Economics, Dalhousie University.

Xu, K. and Osberg, L., "The social welfare implications, decomposability, and geometry of the Sen family of poverty indices", *Canadian Journal of Economics* 35 (2001), 138-152.

Xu, K. and Osberg, L., " On Sen's approach to poverty measures and recent developments", paper presented at the Sixth International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare (2002), Printed in Chinese in *China Economic Quarterly* 1, 151-170.