第1卷第1期　　经济学(季刊)　　Vol. 1, No. 1
2001年10月　　China Economic Quarterly　　Oct., 2001

# 关于森的贫困度量方法及该领域最近的研究进展

徐　宽　Lars Osberg*

**摘　要**　在这篇文章中，我们应用贫困度量的公理化方法对森的贫困指数提出了一个统一的理论框架。这一理论框架清晰地表明，这些指数与一个特定的社会福利函数之间存有密切的联系，而且，我们发现这些指数具有相同的可分的乘积结构。因为这个性质，这些指数无论是从直观的角度还是从几何学的角度都更加便于理解，同时也更便于计算。这些发现使森的贫困指数可以直接在发达国家和发展中国家的扶贫政策分析和政策制定过程中得到应用。

**关键词**　贫困指数，社会福利函数，基尼系数

## 一、引　言

究竟如何去衡量贫困到底有多严重？现在和过去相比，一个国家的贫困程度是增加了还是减少了？为了回答这些貌似简单的问题，经济学家应该选择：（1）一个判定贫穷的标准（比如家庭或个人的收入是否低于某一贫困线）；（2）一个度量社会贫困程度的指数。本文在森 (Sen ,1976) 的贡献基础之上分析第二个问题。

现在常用的一些贫困指数（比如贫困率）虽然易于理解但常常误导公众。其它一些指数虽有可靠的理论基础，但因太复杂而很少用于政策分析。因此，在提出一个贫困指数时，经济学家既要防止在理论上出现谬误，也要避免使其过于复杂以至于无法被政策制定者所运用。森的贫困指数的优点在于在理论上有说服力，在实践中又易于为公众所理解。

森（1976）不仅提出了有关贫困度量的公理化方法，而且还明确地提出了一个贫困指数。从此，贫困的度量问题一直是一个活跃的研究领域，该领域的理论文献也越来越多。[1] 森指数（或称为 S 指数[2]）以及改进的森指数（或称为 $SST$ 指数[3] 已经在关于贫困问题的经验研究中得到应用见 Bishop 、Formby and Zheng, 1997; Myles and Picot, 2000; Osberg, 2000; Osberg and Xu, 1997, 1999, 2000; Rongve, 1997; Xu, 1998）。

---

* 达尔豪斯大学经济系。通信作者及地址：Kuan Xu, Department of Economics, Dalhousie University, Halifax, NS, Canada. B3H 3J5 。电话： (01-902)494-6995; Email： Kuan.Xu@Dal.Ca 。这篇论文是基于我们在过去几年合作的有关贫困指数的论文之上写作的。徐宽感谢北京大学、清华大学、中国人民银行研究生部、中国社会科学院、北京科技大学和天津大学在他学术休假访问期间给予的热情接待。同时我们还感谢达尔豪斯大学和加拿大社会人文学科研究委员会提供的资助。

[1] 见最近两篇综述文章 Zheng (1997) 、 Foster 和 Sen(1997) 以及其中所引的文献。

[2] 在 Sen(1997) 中这个指数被称为 $S$ 指数。

[3] 在 Shorrocks (1995) 和 Sen(1997) 中，这一指数被称为改进的森指数。 Shorrocks (1995) 提出了这个指数， Zheng (1997) 发现这个指数就是 Thon 提出的指数的极限 (Thon, 1979, 1983) 。所以，我们称之为 $SST$ 指数 (见 Osberg and Xu, 1997, 1999, 2000) 。

尽管森的这些指数是以有说服力并被广泛承认的公理为基础的，但现有的文献尚未对与这些指数密切相关的社会福利函数做出明确的总结[4]。因此，我们有必要对这些指数的社会福利含义做进一步的研究。 Bourguignon 和 Fields(1997) 指出，当人们的收入很低时，贫困的度量可以被视为对社会福利损失的衡量。Blackorby 和 Donaldson(1978,1980) 以及 Chakravarty (1983,1997) 的工作为说明诸多不平等指数和贫困指数的社会福利含义提供了坚实的基础。本文以他们的成果为基础来考察隐含在森的这些指数中的社会福利函数。

为了使森的贫困指数更易于为政策制定者所理解，我们仍需要考察这些指数及其组成部分之间的相互关系（见 Birdsall and Londono, 1997; Phipps, 1999）。Foster 、 Greer 和 Thorbecke(1984) 提出的一个贫困指数的特性是它具有可分、可加性。[5] 尽管一般而言，森的这些指数（也包括由它们衍生而来的若干指数，比如 BD 指数[6] 和 C 指数[7]）并不具有这种可分、可加性[8]，但它们却具有可分的乘积性。[9] Bourguigon 和 Fields (1997) 注意到，一些具有可分、可加性的贫困度量标准一旦应用到实际中，往往会使扶贫政策走样。比如，过多的去扶助贫困人口中最富裕的人群。他们认为，一个恰当的贫困度量标准应有助于对扶贫政策措施做出综合评价。因为森的贫困指数具有坚实的理论基础，并可以表达为几个组成部份的乘积，所以它们十分适用于对扶贫困政策的诸多影响因素的衡量。

在关于收入不平等的文献中，基尼系数或基尼指数可能是应用得最多的不平等指数。原因之一就是基尼指数的几何解释非常简单和直观。 $SST$ 指数也是如此 (Shorrocks, 1995; Jenkins and Lambert, 1997; Osberg and Xu, 1997, 2000; Xu and Osberg, 1998)。但森关于 $S$ 指数的几何解释却并不那么的直观 (见 Sen, 1976: p.226 )。森的贫困指数所共有的可分的乘积性表明它们一定有类似的简单和直观的几何解释。

在本文中，我们将考察森所有的指数中所共同隐含的社会福利函数、可分的乘积性质和其几何解释。我们要说明：（1）森指数是建立在一套有说服力并被广泛承认的公理基础上的；（2）森指数隐含共有的基尼社会福利函数，即社会福利水平是以收入的加权平均来衡量，其权重就是将收入排序得到的序数；（3）森指数也具有共同的可分的乘积结构，即每个指数都可以表示为三个指标，贫困率、穷人的平均贫困差距率[10] 和贫困差距率的基尼指数加 1 三者的乘积；（4）$SST$ 指数是 $S$ 指数的一个线形变换，反之亦然； (5) 森指数共有的可分的乘积性使它们具有类似的简单而直观的几何解释；（6）由于这种可分的乘积性，森指数在线性化后便具有可分、可加性。对于实证研究和政策分析而言，这是一个非常有用的结果。

本文结构如下。在第二节，我们介绍一些符号、基本的概念和公理、以及森的贡献的历史背景。在第三节，我们讨论森指数所共有的社会福利函数、可分的

[4] Dalton(1920) 在他开创性的文章中提出，任何收入不平等的度量都有一个隐含的社会福利函数，这一点在 Kolm (1969) 、 Atkinson (1970) 和 Sen(1973) 中得到了精确的描述。
[5] Chakravarty (1990) 第 7 章对贫困程度指数的可分、可加性有一个详尽的综述。
[6] 见 Blackorby 和 Donaldson (1980)。
[7] 见 Chakravarty (1983)。
[8] 阶数为 $r(r<1)$ 的对称均值的 Chakravarty 指数是一个例外。
[9] Clark,Hemming 和 Ulph(1981) 最早就 $S$ 指数对这一性质作了简短的阐述，后来 Osberg 和 Xu (1997, 1999, 2000) 就 $SST$ 指数对该性质作了考察。
[10] 有时，平均贫困差距率被简称为贫困差距。

乘积性质以及它们的简单而直观的几何解释。我们将在第四节介绍应用森的一个贫困指数的实例。第五节则是本文结语。

## 二、森的贫困指数系列

(一) 符号

令 $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ 为 $n$ 个人 (或家庭) 的收入按非递减顺序排列的向量，其中 $T$ 表示一个矩阵或向量的转置。令 $\tilde{y}$ 为 $y$ 按照非递增顺序排列的的收入向量，“$\sim$”表示一个向量 $x$ 按照相反的顺序排列。令贫困线为 $z > 0$ 。

令贫困人口的数量为 $q$ ，贫困率 $H$ 则为 $q/n$ 。如果 $y_i < z$ ，令 $\overset{*}{y}_i = y_i$ ；否则，令 $\overset{*}{y}_i = z$[11] 。由此得到一个修改的收入向量，也就是 $\overset{*}{y} = [\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \cdots, \overset{*}{y}_n]^T$ 。穷人的收入向量为 $y_p = [y_1, y_2, \cdots, y_q]^T$ ，它是从修改的收入向量 $\overset{*}{y}$ 中将值等于 $z$ 的元素删去而得到的。收入向量 $y$ 的平均值为 $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ 。

整个人口的贫困差距率向量为 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, 其中穷人的贫困差距率为 $x_i = \frac{z-y_i}{z}, i = 1, 2, \cdots, q$ ，非贫困人口的贫困差距率为 0 。同理，贫困人口的贫困差距率向量为 $x_p = [x_1, x_2, \cdots, x_q]^T$ ，其中穷人的贫困差距率为 $x_i = \frac{z-y_i}{z}, i = 1, 2, \cdots, q$ ，而非贫困人口的贫困差距率则在整个人口的贫困差距率向量中被删除。请注意， $x$ 和 $x_p$ 的元素都是按照非递增的顺序排列的。总人口（或贫困人口）的平均贫困差距率可表示为 $\bar{x}$(或 $\bar{x}_p$) 。并且， $\bar{x} = H\bar{x}_p$ 。

（二）公理化方法

森是贫困度量公理化方法的著名提倡者。在他的倡议之前，一般使用的贫困指标都是在某种先验的基础上提出的。但他认为贫困指标必须与在理论上经得起考验的标准相一致。在森的倡导下，经济学文献确立了如下的一些基本公理：[12]

(1) **相关性公理：贫困指数应与贫困人口有关而不受非贫困人口影响；**

(2) **弱单调性公理：在其他人收入不变的情况下，任意一个穷人收入的减少都应使贫困指数提高；**

(3) **公平性公理：贫困指数的高低不应受对收入的排序的影响；**

(4) **弱转移性公理：如果贫困人群没有变化，收入由一个较穷的穷人向一个较富的穷人转移，后者仍未脱贫，则贫困指数应提高；**

(5) **强转移性公理：收入由一个较穷的穷人向一个较富的穷人转移，则贫困指数应提高；**[13]

(6) **连续性公理：贫困指数应是收入的连续函数；**

(7) **复制不变性公理：如果计算贫困指数所基于的收入分布是最初的收入分布的 $k$ 次复制，则贫困指数应保持不变。**

尽管这些公理从伦理道德的角度看是无可争议的，但并不是所有常用的贫困指数都满足这些公理，尤其是前 4 个基本公理。

[11] 与现有文献相一致，这里把穷人定义为收入水平低于贫困线的人。
[12] 见 Chakravarty (1990) 对此更详细的说明。
[13] 请注意，强转移性公理隐含着弱转移性公理，因为前者允许贫困人群变化，而后者则不允许贫困人群有变化。

贫困率 $(H=q/n)$ 是使用最广泛的贫困指数，它定义为收入水平低于贫困线的人口占总人口的百分比。这个指数满足相关性公理，也就是说，如果更多（或更少）个人的收入降到贫困线之下，穷人的数量增加（或减少），则贫困率会上升（或下降）。但贫困率违背了弱单调性和弱转移性公理，因为在贫困线以下的穷人的收入的不均等性对贫困率的高低没有任何影响。这就是说，贫困率并不反映穷人收入低于贫困线不同程度的情形，也不反映贫困人口收入分布的状况 (Sen，1976)。在实践中，假如扶贫政策的目标是降低贫困率的话，那么最简便的政策措施就是补贴贫困人口中的收入最高者，以使其收入水平刚好高过贫困线。很显然，这样的政策措施必定会引起争议。

贫困人口的平均贫困差距率 $(\bar{x}_p=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\frac{z-y_i}{z})$ 是另一个被广泛使用的指数。它度量相对于贫困线而言贫困人口的平均的相对收入短缺。如果相对于贫困线而言的收入短缺从总体上增大（或减小），那么平均贫困差距率就会上升（或降低）。但是，这个指数并不受贫困人口占总人口百分比变化的影响，而且也不反映贫困人口的收入分布的状况，因而违背了弱转移性公理（见 Sen，1976）。这就是说，当收入从一个穷人转移到另一个穷人但两者均没有脱贫，贫困人口的平均贫困差距率将不会对此有任何反映。

这些普遍使用的贫困指数并不令人满意，这使得森（1976）基于相关性、弱单调性和弱转移性公理提出了 $S$ 指数。$S$ 指数的最初形式就是从这些公理推出的，它可以定义为穷人的收入向量分布的函数：

$$I_{S_0}(y_p)=H\left[1-(1-\bar{x}_p)\left(1-G(y_p)\left(\frac{q}{1+q}\right)\right)\right]. \tag{1}$$

其中 $G(y_p)$ 是穷人收入分布的基尼指数 (下文将给出基尼指数的定义)。遗憾的是，S 指数的最初形式并不满足强转移性、连续性和复制不变性公理。[14] 森（1976) 提出了 $S$ 指数的第二个形式。它是令方程 (1) 中的 $q$ 很大以致于趋近于 1 而得到的：

$$I_S(y_p)=H[\bar{x}_p+(1-\bar{x}_p)G(y_p)]. \tag{2}$$

$S$ 指数的第二个形式就是文献中所称的 $S$ 指数，它满足复制不变性公理。

考虑到 S 指数的最初形式并不满足强转移性、连续性和复制不变性公理，Shorrocks(1995) 提出了改进的 S 指数或 $SST$ 指数并证明了 $SST$ 指数满足强转移性、连续性和复制不变性公理。$SST$ 指数被定义为修改的收入向量分布 $\overset{*}{y}$ 的函数：

$$I_{SST}(\overset{*}{y})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)x_i. \tag{3}$$

Osberg 和 Xu(1997) 发现 $SST$ 指数可以表达为三个被广泛使用的贫困和不平等指数的乘积，这三个指数是贫困率、穷人的平均贫困差距率以及贫困差距率的基尼指数加 1。这使得对 $SST$ 指数的理解和使用得到明显的简化。Osberg 和 Xu(1997, 1999, 2000) 将 $SST$ 指数的这种可分的乘积性应用到国际和地区的比较研究中。加拿大统计局的经济学家也将这种方法应用到加拿大儿童的低收入分析中 (Myles and Picot, 2000)。

[14] 见 Shorrocks (1995: p. 1225) 和 Sen (1997: p. 171)。

下面，我们将证明 $S$ 和 $SST$ 指数实际上都隐含着一个共有的社会福利函数，并具有同样的可分的乘积性结构和类似于基尼指数的几何解释。

## 三、共有的社会福利函数和可分的乘积结构

### （一）共有的基尼社会福利函数

为了分析森的贫困指数的社会福利含义，我们需要引入均等分布的等价收入（ EDEI ）这个概念（见 Atkinson， 1970； Kolm， 1969; Sen， 1973）。对于一个特定的社会福利函数，若全社会每个个体得到某一同等收入所产生的社会福利水平与实际社会收入分布所产生的社会福利水平相同，那么，这个同等收入就称为与那个社会福利函数对应的均等分布的等价收入（ EDEI ）。这一概念可以用数学方法进一步说明。令 $W(y)=\phi(\overline{W}(y))$ 为一个位似 (homothetic) 序数收入的社会福利函数，其中 $\phi$ 是一个增函数， $\overline{W}$ 为一个线性齐次函数。令 $\xi$ 为均等分布的等价收入 EDEI 值， 1 为一个具有适当维数的单位向量。则序数收入的社会福利函数可表示为 $W(\xi\cdot 1)=W(y)$ 或 $\overline{W}(\xi\cdot 1)=\overline{W}(y)$ 。因为 $\overline{W}$ 是正定线性齐次的，则均等分布的等价收入 EDEI 可按 $\xi=\frac{\overline{W}(y)}{\overline{W}(1)}=\Xi(y)$ 函数来计算。可见，社会福利函数 $(W)$ 和 EDEI 函数 $(\Xi)$ 具有一一对应的关系。

例如，基尼社会福利函数为 $\overline{W}_G(y)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(2n-2i+1)y_i$, [15] 与它对应的基尼均等分布的等价收入 EDEI 函数是:

$$\Xi_G(y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)y_i \tag{4}$$

或

$$\Xi_{\widetilde{G}}(\tilde{y})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\tilde{y}_i, \tag{5}$$

其中 $\Xi_G(y)=\Xi_{\widetilde{G}}(\tilde{y})$ 。 [16] 基尼社会福利函数对于较低 (或较高) 的收入赋予了较大 (或较小) 的福利权重。福利权重是由收入的某种排序序数的大小而不是收入的多少来决定。 [17] 事实上，基尼指数也可按照基尼 EDEI 函数及平均收入来定义:

$$G(y)=1-\frac{\Xi_G(y)}{\bar{y}}=1-\frac{1}{n^2\bar{y}}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)y_i \tag{6}$$

或

$$\widetilde{G}(\tilde{y})=1-\frac{\Xi_{\widetilde{G}}(\tilde{y})}{\bar{y}}=1-\frac{1}{n^2\bar{y}}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\tilde{y}_i. \tag{7}$$

---

[15] 这是因为 $\overline{W}_G(1)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(2n-2i+1)=1$ 。

[16] 这是因为 $y_i=\tilde{y}_{n-i+1}$ 且 $\tilde{y}_i=y_{n-i+1}$ 。

[17] 基尼社会福利函数作为一个序数预期效用函数在经济理论上也得到了重视; 见 Chew and Safra (1987) 、 Quiggin (1982) 、 Segal and Pivak (1990) 以及 Yaari(1987) 。

其中 $y$(或 $\tilde{y}$) 的元素是按非递减（或非递增）的顺序排列的。[18] 在方程（6）和方程（7）中 $G(y)=\widetilde{G}(\tilde{y})$ 是等价的，但 $G(\cdot)$ 和 $\widetilde{G}(\cdot)$ 具有不同的函数形式，并且 $y$ 和 $\tilde{y}$ 中元素的排列顺序也不同。注意下面的等价关系十分有用而且在下文也会用到：[19]

$$G(y)=-G(\tilde{y}). \tag{8}$$

为更好地理解 $S$ 和 $SST$ 指数之间的联系，有必要介绍 Blackorby 和 Donaldson(1980) 的 $BD$ 指数和 Chakravarty(1983) 的 $C$ 指数。因为这些指数是利用与某一社会福利函数相对应的 EDEI 函数来定义的，所以使用这些指数有利于发现与 $S$ 和 $SST$ 指数相联系的社会福利函数。同 $S$ 指数相一致，$BD$ 指数关注的是贫困人口的收入向量 $y_p$，它定义为：

$$I_{BD}(y_p)=H\left[\frac{z-\Xi(y_p)}{z}\right]. \tag{9}$$

其中 $\Xi$ 是相对于某一递增的、严格 $S$- 凹社会福利函数的 EDEI 函数[20]。在这个定义中，EDEI 函数是一个未加限定的、一般的 EDEI 函数。$S$ 指数定义为：

$$I_S(y_p)=H[\bar{x}_p+(1-\bar{x}_p)G(y_p)]. \tag{10}$$

具有基尼 EDEI 函数 $\Xi_G(y_p)$ 的 $BD$ 指数 $I+BD(y_p)$ 就是 $S$ 指数，即

$$I_S(y_p)=I^G_{BD}(y_p)=H\left[\frac{z-\Xi_G(y_p)}{z}\right]=H\Xi_G(x_p) \tag{11}$$

（见 Blackorby and Donaldson, 1980: pp.1054–1055）。方程（11）提供了一个数学构架，由此我们能够看到 $S$ 指数是当 $BD$ 指数隐含着基尼社会福利函数的一个特例。[21]

Chakravarty(1983) 沿着 Thon(1979) 和 Takayama(1979) 的思路提出了关于修改的收入向量 $\overset{*}{y}$ 的 $C$ 指数：

$$I_C(\overset{*}{y})=\frac{z-\Xi(\overset{*}{y})}{z}, \tag{12}$$

其中 $\Xi$ 是相对于某一递增的、严格 $S$- 凹的社会福利函数的 EDEI 函数。同样，EDEI 函数是一个未加限定的、一般的 EDEI 函数。$SST$ 指数定义为：

$$I_{SST}(\overset{*}{y})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)x_i \tag{13}$$

[18] 这两个方程式是等价的，因为 $\bar{y}=\bar{\tilde{y}}, y_i=\tilde{y}_{n-i+1}$ 以及 $\tilde{y}_i=y_{n-i+1}$。

[19] 见 Fei，Ranis 和 Kuo (1978)，以及 Xu 和 Osberg (2001a)。

[20] 如果对任意的 $y\in R^n_+$，有一个函数 $f: R^n_+\to R^1$ 满足 $f(By)\geq f(y)$，其中 $B$ 是一个双随机 (bistochastic) 矩阵（即一个 $n$ 阶方阵，其中所有元素均为非负的，且各行各列的元素之总和为 1，即 $\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=1, j=1,2,\cdots,n; \sum_{j=1}^{n}b_{ij}=1; i=1,2,\cdots,n$），那么这个函数就称为是 $S$- 凹的。

[21] 应该注意到森 [Sen (1976)] 是以公理 $R$(以排序的序数为权重)，公理 $M$(福利的单调性)，和公理 $N$(贫困水平标准化) 为出发点的，这些公理都具有基尼社会福利的含义。

或

$$I_{SST}(y_p) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{q}(2n-2i+1)x_i. \tag{14}$$

具有基尼 EDEI 函数 $\Xi_G(\overset{*}{y})$ 的 $CDV8J''I_c(\overset{*}{y})$ 就是 $SST$ 指数 $I_{SST}(\overset{*}{y})$，即

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = I_C^G(\overset{*}{y}) = \frac{z - \Xi_G(\overset{*}{y})}{z} = \Xi_G(x), \tag{15}$$

(见 Chakravarty,1997) 。方程（ 15 ）提供了一个数学构架，由此我们能够看到 $SST$ 指数是当 $C$ 指数隐含着基尼社会福利函数的一个特例。

从上面的讨论中我们可以看到，$S$ 指数 $I_S$ 或 $SST$ 指数 $I_{SST}$ 的值越高 (或越低)，贫困程度就越高 (或越低)，用基尼社会福利函数度量的社会福利就越低（或越高）。所以，森的贫困指数值的高低直接反映了按基尼社会福利函数所测量到的社会福利的水平。

（二）共有的可分的乘积结构

尽管 $S$ 指数和 $SST$ 指数都不能分开来相加，它们却能分解为贫困率、平均贫困差距率和贫困差距率的基尼指数加 1 (基尼指数加 1 与基尼指数一样可用于度量不平等的程度) 三者的乘积。

**命题 1**　$S$ 指数具有如下的可分的乘积性:

$$I_S(y_p) = H\bar{x}_p(1 + G(\tilde{x}_p)), \tag{16}$$

其中 $\tilde{x}_p$ 的元素是以非递减顺序排列的。

证明　利用 $G$ 和 $\Xi_G$ 之间的关系（方程 (6)）和方程（ 8 ）将方程（ 11 ）改写为:

$$I_s(y_p) = H\Xi_G(x_p) = H\bar{x}_p(1 - G(x_p)) = H\bar{x}_p(1 + G(\tilde{x}_p)), \tag{17}$$

其中 $x_p(\tilde{x}_p)$ 的元素是以非增（或非减）的顺序排列的。　　证毕

如以上命题所示，$S$ 指数是贫困率、平均贫困差距率和穷人贫困差距率的基尼指数加 1 的乘积。这里，有必要将 $S$ 指数原有的形式同这个指数分解后的形式加以比较。正如森（ 1976 ）所说，对一个数值很大的 $q$, $S$ 指数是按照方程（ 10 ）定义的，其中基尼指数是贫困人口收入分布的基尼指数。当 $S$ 指数按照方程（ 16 ）定义时，基尼指数则是贫困人口的贫困差距率分布的基尼指数。方程（ 16 ）比方程（ 10 ）要简单一些，下文将对此做简洁的几何解释。

下一个命题表明 $SST$ 指数具有类似的可分的乘积性。

**命题 2**　$SST$ 指数具有如下的可分的乘积性:

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = H\bar{x}_p(1 + G(\tilde{x})), \tag{18}$$

其中 $\tilde{x}$ 的元素按非递减顺序排列。

证明　利用 $G$ 和 $\Theta_G$ 之间的关系（方程（6））、方程（8）和 $\bar{x}=H\bar{x}_p$ 将方程（15）改写为：

$$I_{SST}(\overset{*}{y})=\Xi_G(x)=\bar{x}(1-G(x))=H\bar{x}_p(1+G(\tilde{x})),\tag{19}$$

其中 $x(\tilde{x})$ 的元素是以非增（或非减）的顺序排列的。　　证毕

如以上命题所示，$SST$ 指数是贫困率、平均贫困差距率和总人口贫困差距率的基尼指数加 1 的乘积。$S$ 指数和 $SST$ 指数的差异只在于 $G(\cdot)$ 项的不同，$S$ 指数是穷人贫困差距率的基尼指数 $G(\tilde{x}_p)$，而 $SST$ 指数是总人口贫困差距率的基尼指数 $G(\tilde{x})$。因为非贫困人口的贫困差距率为 0，而且贫困和非贫困人口在修改的收入向量 $\overset{*}{y}$ 中并不重叠，总人口贫困差距率的基尼指数可以分解成如下两个部分：

**引理 1　总人口贫困差距率的基尼指数 $G(\tilde{x})$ 是贫困人口和非贫困人口之间平均贫困差距率的基尼指数 $(1-H)$，与贫困人口贫困差距率的按贫困率加权的基尼指数 $HG(\tilde{x}_p)$ 之和：**

$$G(\tilde{x})=(1-H)+HG(\tilde{x}_p).\tag{20}$$

证明　从方程 (6) 有

$$G(x)=1-\frac{1}{n^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)x_i,\tag{21}$$

其中贫困人口的贫困差距率向量的 $x$ 元素按非递增顺序排列（即在这个列向量中，贫困人口的贫困差距率占据列向量的上面部分，而非贫困人口的贫困差距率占据下面部分）。同理，从方程（6）得到

$$G(x_p)=1-\frac{1}{q^2\bar{x}_p}\sum_{i=1}^{q}(2q-2i+1)x_i,\tag{22}$$

其中贫困人口的贫困差距率的向量 $x_p$ 的元素按非递增顺序排列。已知 $\bar{x}=H\bar{x}_p$，从方程（21）得到

$$G(x)=1-\frac{q}{n}\frac{1}{q^2\bar{x}_p}\sum_{i=1}^{q}(2q-2i+1)x_i-2\left(1-\frac{q}{n}\right).\tag{23}$$

它可以进一步地改写成

$$G(x)=\frac{q}{n}\left\{1-\frac{1}{q^2\bar{x}_p}\sum_{i=1}^{q}(2q-2i+1)x_i\right\}-\left(1-\frac{q}{n}\right).\tag{24}$$

所以

$$G(x)=(H-1)+HG(x_p).\tag{25}$$

将方程（8）用于方程（25）左边的 $G$，方程（25）变为

$$G(\tilde{x})=-(H-1)-HG(x_p).\tag{26}$$

将方程（ 8 ）用于方程（ 26 ）右边的 $G$ ，方程（ 26 ）变为

$$G(\tilde{x}) = (1 - H) + HG(\tilde{x}_p). \tag{27}$$

证毕

**命题 3**　*$SST$ 和 $S$ 指数有如下的关系：*

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = HI_S(y_p) + 2H(1 - H)\bar{x}_p. \tag{28}$$

**证明**　综合引理 1 和命题 2 的结果得

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = H\bar{x}_p(2(1 - H) + (1 + G(\tilde{x}_p))). \tag{29}$$

进一步整理方程（ 29 ）便得方程（ 28 ）。 Zheng(1997) 叙述了同样的结果（方程 (3.9), 第 146 页），但他没有给出证明。　　证毕

Chakravarty(1990, 定理 6.9) 指出，如果社会福利函数是完全严格递归的 (completely strict recursive)，则

$$I_{BD}(y_p) < I_C(\overset{*}{y}). \tag{30}$$

换言之， $BD$ 指数是以 $C$ 指数为上界的。基尼社会福利函数是 $S$ 和 $SST$ 指数所隐含的社会福利函数，尽管它不是完全严格递归的，但是也具有类似的关系。

**命题 4**　*$S$ 指数以 $SST$ 指数为上界，即*

$$I_S(y_p) < I_{SST}(\overset{*}{y}). \tag{31}$$

**证明**　从方程 (28) 得

$$\Xi_G(x) = H^2\Xi_G(\bar{x}_p) + 2H(1 - H)\bar{x}_p.$$

因为 $2H(1 - H)\bar{x}_p > 0$ 且 $H < 1$, 所以

$$\begin{aligned} I_{SST}(\overset{*}{y}) &= \Xi_G(x) \\ &< H^2\Xi_G(\bar{x}_p) \\ &< H\Xi_G(\bar{x}_p) \\ &< I_S(y_p). \end{aligned}$$

证毕

$S$ 和 $SST$ 指数的这种共有的可分的乘积性，使得经济学家们可以通过利用这些指数及其组成部分来测量贫困对社会福利的影响。通过对数变换， $S$ 和 $SST$ 指数的可分的乘积性可转化为可分可加性。在下面推论中，我们用 $I$ 表示 $S$ 指数或 $SST$ 指数，用 $G$ 表示贫困人口或总人口贫困差距率的基尼指数。

**推论 1** 由于 $S$ 和 $SST$ 贫困程度指数可由下式表示

$$I = H\bar{x}_p(1+G), \tag{32}$$

那么

$$\Delta I = \Delta H + \Delta \bar{x}_p + \Delta(1+G), \tag{33}$$

其中 $\Delta x = \ln x_t - \ln x_{t-1} \approx \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$ 约等于 $x$ 的一个微小变化的百分比。

依研究目的之不同，在计算不同时期的贫困指标以及其组成部分时，可以在不同时期采用同一贫困线，即 $z_t = z_{t-1} = z$，也可以各期采用不同的贫困线，即 $z_t$ 和 $z_{t-1}$ 。

这种共有的可分相乘性也使得政策制定者可以设定三个特定的扶贫政策目标 (降低贫困率、降低贫困差距和降低贫困的不平等程度) 以降低总体的贫困程度。森指数及其组成部分可直接用来测量扶贫政策实施的综合效果。[22]

（三）相似的几何解释

事实上，与 Shorrocks (1995) 有关 $SST$ 指数的几何解释相似， $S$ 指数的几何解释可以比森（ 1976 ）本人的几何解释更为简化。为便于比较，我们将对 $S$ 指数和 $SST$ 指数一起讨论。贫困差距率是相对贫困的一个度量。如果 $z > y_i$，$x_i = \frac{z-y_i}{z}$ ；否则 $x_i = 0$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ 。贫困差距率的列向量中的元素是非递增序列，即最大的贫困差距排列在前，最小的贫困差距排列在后。其中，前面的 $q$ 个 $x_i$ 具有正的实数值，表示贫困人口收入低于贫困线的程度；其余的 $x_i$ 取值为零，表示非贫困人口的收入不低于贫困线。

令 $r = 1, 2, \cdots, n$ ，在长和高分别为一个单位的框图里，纵坐标和横坐标分别取值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i$ 和 $\frac{r}{n}$ 来描点，就得到贫困曲线。如图 1 所示，贫困曲线从原点开始，以一条凹线到达点 $a$，然后以一条水平线从点 a 到达点 $H\bar{x}_p$ 。 $H$ 点表示贫困率， $H\bar{x}_p$ 点表示总人口的平均贫困差距比率 $\bar{x}$ 。因为贫困差距率 $\{x_i\}$ 为一个非递增的序列，所以凹弧 $0a$ 实际上是贫困差距率 $\{x_i\}$ 的一个转置的广义洛伦兹曲线，它表示贫困人口的贫困差距率的不平等程度。假如贫困人口的收入全是相同的（即他们的贫困差距率全是相同的），图 1 中连接点 0 和点 $a$ 的虚线就会成为贫困曲线的一部分，它表示贫困人口的贫困差距率的完全平等程度。由于非贫困人口的贫困差距率为零，贫困曲线从点 $a$ 到点 $H\bar{x}_p$ 的水平部分并不提供更多信息，它只是说明非贫困人口占据总人口 $1-H$ 的部分。

[22] Bourguignon 和 Fields (1997) 以及 Ravallion 、 van der Walle 和 Gautam (1995) 讨论了贫困度量和扶贫政策措施之间的关系。正如 Bourguignon 和 Fields (1997) 所言，如果在贫困与非贫困之间（比如，从社会功能方面而言）的质的差别极为重要，则贫困率就特别令人关注。同理，如果贫困的深度是社会的关注点，则贫困差距率就会得到特别的重视。如果社会更关心的是贫困的分布状况，则贫困的不平等程度就显得更为重要。但实际上，贫困的不平等程度随时间不同或行政区域的不同的变化，相对于贫困率或平均贫困差距率的变化而言，要小得多。见 Osberg 和 Xu (1997, 2000) 。

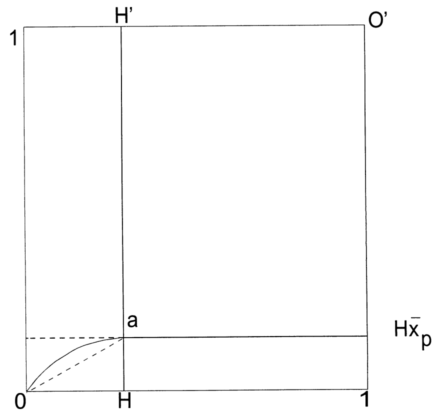


图 1.　贫困曲线

图 2 说明 $S$ 指数也有类似基尼指数的简单的几何解释。图中三角形 $0H'H$ 的面积为 $E$ ，三角形 $0Ha$ 的面积为 $C$ ，在弧线 $Oa$ 和虚线 $Oa$ 之间的面积为 $D$ 。所以

$$A_{rea}E = \frac{1}{2}H. \tag{34}$$

$$A_{rea}C = \frac{1}{2}H^2\bar{x}_p. \tag{35}$$

面积 $D$ 可由贫困人口的贫困差距率的基尼指数的定义得到： [23]

$$G(\tilde{x}_p) = \frac{A_{rea}D}{A_{rea}C'} = \frac{A_{rea}D}{A_{rea}C}. \tag{36}$$

利用方程（ 35 ）和方程（ 36 ）得到 $A_{rea}D = A_{rea}C \times G(\tilde{x}_p) = \frac{1}{2}H^2\bar{x}_pG(\tilde{x}_p)$ 。

$S$ 指数就是面积 $C$ 和面积 $D$ 之和与面积 $E$ 的比率，即

$$\begin{aligned} I_S(y_p) =& \frac{A_{rea}C + A_{rea}D}{A_{rea}E} \\ =& \frac{\frac{1}{2}H^2\bar{x}_p + \frac{1}{2}H^2\bar{x}_pG(\bar{x}_p)}{\frac{1}{2}H} \\ =& H\bar{x}_p(1 + G(\tilde{x}_p)). \end{aligned} \tag{37}$$

[23] 请注意由两条虚线和纵轴围成的区域 $C'$ 的面积等于 $C$ 。贫困人口的贫困差距率的基尼指数在此定义为，在长为 $H$ 、高 $\bar{x}=H\bar{x}_p$ 为的矩形内，两块面积的比率。当改变纵轴和横轴的比例单位将这个矩形转换为一个单位框图时，两块面积的比率不会改变。所以，贫困人口的贫困差距率的基尼指数可以定义为这两块面积的比率。

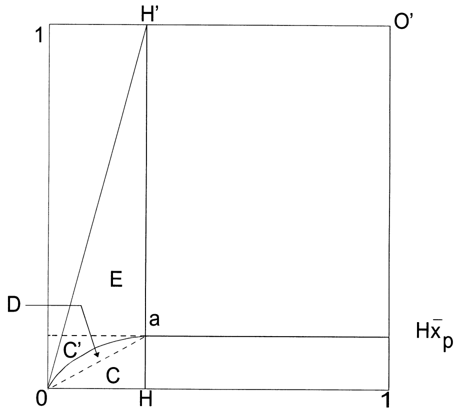


图 2. $S$ 指数的几何解释

为了更好地理解森的贫困指数共有的可分的乘积性质和相似的几何解释，我们用图 3 来分析 $SST$ 指数。令图 3 中单位框图的右下方的三角的面积为 $A$，右下方的矩形面积为 $B$。所以

$$A_{rea}A = \frac{1}{2} \tag{38}$$

并且

$$A_{rea}B = (1-H)H\bar{x}_p = H\bar{x}_p - H^2\bar{x}_p. \tag{39}$$

根据方程 (18), $SST$ 指数可以表示成

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = H\bar{x}_p(1+G(\tilde{x})). \tag{40}$$

利用方程 (20), 将方程 (40) 进一步变成

$$I_{SST}(\overset{*}{y}) = H\bar{x}_p(2-H+HG(\bar{x}_p)). \tag{41}$$

现在计算面积 $B, C, D$ 的总和与面积 $A$ 的比率，即

$$\begin{aligned} I_{SST}(\overset{*}{y}) =& \frac{A_{rea}B + A_{rea}C + A_{rea}D}{A_{rea}A} \\ =& \frac{H\bar{x}_p[(1-H)+\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}HG(\tilde{x}_p)]}{\frac{1}{2}} \\ =& H\bar{x}_p(2-H+HG(\tilde{x}_p)). \end{aligned} \tag{42}$$

所以， $SST$ 指数为 $B, C, D$ 的面积之和与面积 $A$ 的比率。

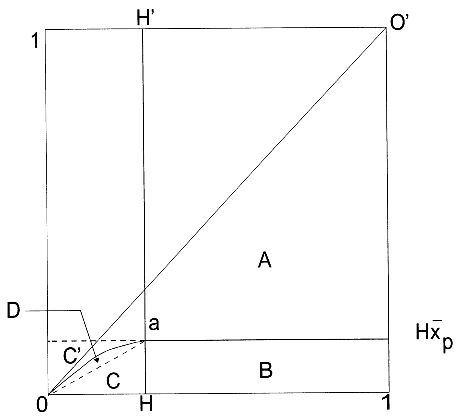


图 3.　*SST* 指数的几何解释

$S$ 和 $SST$ 指数的与基尼指数的相似的几何解释进一步表明 $H, \bar{x}_p$ 和 $G$ 是决定总体的贫困程度的三个关键指标。对从事实证研究的经济学家和政策制定者而言，这种图形分析法可以形象地表达一个社会的贫困程度。从下文可见，这些图形分析法还可以进一步简化。

## 四、应用实例

在这个实例中，我们以 $SST$ 指数及其组成部份来分析英国从 1974 到 1995 年间，拥有适龄就业人口的家庭 (即该家庭年龄最长者的岁数低于 65) 的贫困程度及其变化趋势。统计数字源于卢森堡收入研究 (Luxembourg Income Studies 或 $LIS$) 所收集的 1974 、 1979 、 1986 、 1991 和 1995 的英国的家庭调查数据。[24] 我们用 $SST$ 指数来度量贫困程度。如前所述，$SST$ 指数的值提高表明由贫困引起的社会福利水平降低，并且 $SST$ 指数可以看成是三个指标的乘积：贫困率、平均贫困差距率和总人口的贫困差距率的基尼系数加 1 。[25] 这三个指标分别表示人口中贫困的范围、贫困深度和贫困的分布状况。在其它任意两个指标不变的条件下，每一个指标值的提高都表明由贫困引起的社会福利水平的降低。

尽管 $SST$ 指数是用来揭示整体的贫困程度，但它的三个组成部分对经济学家更深入地了解贫困度也十分有用。特别是，随时间变化，贫困程度的变化有可能同它的某一个组成部分的变化方向截然相反。例如，在表 1 的 $C$ 部分，我们能够看到从 1974 年到 1979 年期间，在失业家庭中其贫困率降低了 ( 从 66% 降到 52.8% )，与此同时其贫困程度却增加了 ( 从 22.5% 上升到 27.3% )，这背后的原因是贫困差距在迅速加大 ( 从 21.3% 上升到 30.4% )。如表 1 的 $A$ 部分所示，从总体而言，拥有适龄就业人口的家庭的贫困程度从 1974 年的 2.3% 降到

[24] 1974 、 1979 、 1986 、 1991 和 1995 年调查的样本量分别为 6695 、 6777 、 7178 、 7056 和 6797 个家庭。家庭的每个个人等价收入可用家庭的税后总收入按照 LIS 标准来计算，即个人的等价收入是家庭的税后总收入除以家庭人口数的平方根。贫困线是以该年个人等价收入分布的中位数的 1/2 来估计的。

[25] 每一个变量都可表示成比率或百分比，但用哪一种写法是无关紧要的。我们按照传统方法表示这些变量使研究结果易于理解。

了 1979 年的 1.5% ，这表明社会福利得到改善。因为贫困率从 1974 年的 5.8% 下降到 1979 年的 3.1% ，它抵消了贫困差距[26]从 1974 年的 19.9% 上升到 1979 年 23.6% 的负面影响。[贫困人口的不平等性只有很小的变化（它是以基尼系数加 1 来度量的）。] 但是，关键的是，如果各个组成部份变化的方向不同，那就很难单从某个组成部分的变化中得知贫困程度变化的总趋势。

从 1979 年到 1986 年，拥有适龄就业人口的家庭的贫困程度由 1.5% 上升到 5.2% 。 1986 年贫困程度的恶化源于贫困率和贫困差距的加大。[27] 贫困程度从 1986 年的 5.2% 上升到 1991 年的 6.4% ，这是因为贫困率增长（ 8.7% 升到 12.8% ）的负面影响大大抵消了贫困差距降低（ 30.4% 降到 25.7% ）的正面影响。

为了向读者形象地展示贫困程度及其主要组成部分的变化趋势，图 4 展示了 5 个拥有适龄就业人口的家庭的“贫困框图”，每个框图对应于一个年份。贫困框图是一个矩形，它的横轴为贫困率、纵轴为贫困差距， 5 个贫困框图的原点相同。贫困框图的排列使读者对贫困率和贫困差距的变化一目了然。正如表 1 中 $1+G$ 纵列表明的那样，贫困人口中的不平等程度随时间变化很小，[28] 所以 $SST$ 指数随时间的变化可以用贫困框图大小和形状的变化来描述。因为图形比数字更直观有效，所以贫困框图不失为有用的工具。

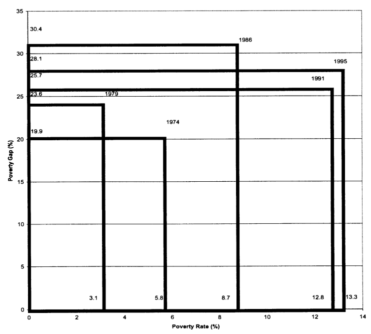


图 4. 英国适龄就业人口家庭的贫困框图： 1974, 1979, 1986, 1991, 1995

图 4 是根据表 1 的 $A$ 部分的数据绘制的。它清楚地表明，从 1974 年到 1979 年期间拥有适龄就业人口家庭的贫困程度降低了，而自 1979 年之后贫困程度却一直上升。图 4 也说明了使贫困程度改变的主要因素：比如，从 1974 年到 1979

[26] 为简化起见，平均贫困差距率简称为贫困差距。

[27] 因为贫困不平等程度的变化非常小 $[(1.958-1.982)/1.982=-0.012]$，所以贫困率和贫困差距变化的影响远远大于贫困不平等程度的变化的影响。因为这一特点的一般性，在这之后我们就不再讨论的变化。

[28] 正如 Osberg (2000: p. 852, 脚注 8 及其参考文献) 所注意到的， LIS 的跨国和跨年的贫困率的变异系数 (表达相对变化程度的指标) 为 0.493 ，平均贫困差距率的变异系数为 0.185 。但是，的变异系数仅为 0.014 。他同样注意到，对 1997 年加拿大各省和美国各州所计算的 $SST$ 指数的变异系数为 0.341 ，贫困率的变异系数为 0.384 ，贫困差距率的变异系数为 0.141 ， $1+G$ 的变异系数为 0.011 。对这种现象的一般的解释是，同非贫困人口的收入分布相比，贫困人口的收入分布的区间是较小的。穷人收入的上限为贫困线，下限（剔除测量误差）为生存的基本要求。按货币计算的这种收入区间不可能很大，尤其是同非贫困人口的收入区间相比时就更是如此。

年贫困程度的下降主要源于贫困率的急剧下降，它的正面影响超过了贫困差距扩大的负面影响；从 1986 年到 1991 年，贫困程度的上升主要源于贫困率上升，它的负面影响大大超过了贫困差距下降的正面影响；在 1995 年，因为贫困率和贫困差距都上升了，贫困程度再度上升。

分析就业状况的影响是贫困分析的重点之一。无论失业的原因是什么，那些达到工作年龄但没有工作的人口通常是贫困人口中最贫困的人群。如表 1 的 $B$ 和 $C$ 部分所示，随时间变化，失业家庭的百分比迅速上升，这在很大程度上导致了这些拥有适龄就业年龄人口的家庭的贫困程度的上升。在 1974 年工党执政时的福利国家时代，95.3% 的达到工作年龄的人口都有工作。撒切尔时代给人的印象似乎总是失业人口在总人口中的百分比持续大幅的增加（从 1979 年的 7.5% 到 1986 年的 17.2% ），只有在 1991 年时有短暂的下降（ 15.6% ）。从 1974 年到 1995 年间失业人口的百分比从 4.7% 升到了 20.4%— 上升了 15.7 个百分点。

表 1. 英国户主年龄小于 65 岁的家庭的贫困趋势

A　所有家庭

| 年份 | 家庭 % | 贫困程度 % | 贫困率 % | 贫困差距 % | $1+G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1974 | 100.0 | 2.3 | 5.8 | 29.9 | 1.969 |
| 1979 | 100.0 | 1.5 | 3.1 | 23.6 | 1.982 |
| 1986 | 100.0 | 5.2 | 8.7 | 30.4 | 1.958 |
| 1991 | 100.0 | 6.4 | 12.8 | 25.7 | 1.934 |
| 1995 | 100.0 | 7.2 | 13.3 | 28.1 | 1.934 |

B　工作家庭

| 年份 | 家庭 % | 贫困程度 % | 贫困率 % | 贫困差距 % | $1+G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1974 | 95.3 | 1.0 | 2.8 | 18.4 | 1.988 |
| 1979 | 92.5 | 1.5 | 3.1 | 23.6 | 1.982 |
| 1986 | 82.8 | 2.5 | 4.1 | 31.0 | 1.978 |
| 1991 | 84.4 | 2.6 | 4.9 | 27.2 | 1.974 |
| 1995 | 79.6 | 2.6 | 4.6 | 28.8 | 1.976 |

C　失业家庭

| 年份 | 家庭 % | 贫困程度 % | 贫困率 % | 贫困差距 % | $1+G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1974 | 4.7 | 22.5 | 66.0 | 21.3 | 1.603 |
| 1979 | 7.5 | 27.3 | 52.8 | 30.4 | 1.701 |
| 1986 | 17.2 | 17.3 | 31.0 | 31.0 | 1.862 |
| 1991 | 15.6 | 23.3 | 55.8 | 25.0 | 1.676 |
| 1995 | 20.4 | 23.3 | 47.4 | 27.8 | 1.768 |

表 1 的 $B$ 和 $C$ 部分说明，人口的就业状况，从而贫困状况，是影响他们最终社会福利水平的因素。失业家庭的贫困程度在 1979 年高达 27.3%，而就业家庭的最高贫困程度仅为 2.6%（在 1991 年和 1995 年）。

当我们考察两类家庭的贫困状况时（见表 1 的 $B$ 和 $C$ 部份），我们注意到与 1991 年相比， 1995 年两类家庭的贫困率都下降了。就业家庭的人口贫困率从 1991 年的 4.9% 下降到 1995 年的 4.6%，失业家庭的人口贫困率从 1991 年的

55.8% 下降到 1995 年的 47.4% 。假定人们用贫困率来度量贫困程度的话，人们必然会得出如下的结论：相对于 1991 年， 1995 年两类的家庭的贫困程度降低了。但是，两种类型的家庭以 $SST$ 指数度量的人口贫困程度在 1991 年和 1995 年却没有变化。就业家庭的人口贫困程度在 1991 年和 1995 年均为 2.6% ，而失业家庭的人口贫困程度在 1991 年和 1995 年均为 23.3% 。从 1991 年到 1995 年，拥有适龄就业人口的家庭的贫困程度从 6.4% 增加到 7.2% 。显然，这在很大程度上是由失业家庭的百分比上升造成的。如前文所述，在这种情况下，不恰当地使用贫困率的确会误导公众。

表 1 的 $B$ 和 $C$ 部分也可以用贫困框图来表示。总人口的贫困程度大体上可看成两类家庭的贫困程度的加权平均，权数为每类家庭所占的百分比。一般而言，失业家庭只占拥有适龄就业人口家庭很小的一部分。但是，由于就业收入通常是经济的主要来源，所以有工作但仍处于贫困线以下的家庭只占就业家庭很小的一部分，而没有工作且又贫困的家庭则占了失业家庭很大的一部分。由于失业和就业的人口的贫困程度有很大差异，所以将总人口的贫困程度，按两类家庭分解成各自的人口贫困程度及其组成部分就显得非常重要。

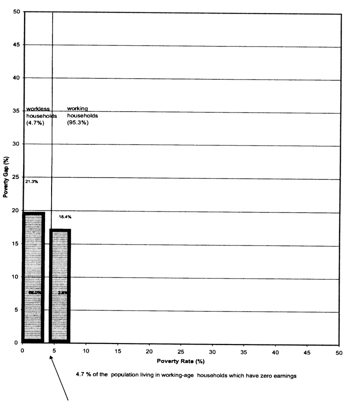


图 5. 英国适龄就业人口家庭的贫困框图： 1974

图 5 和图 6 是用以说明，如何利用贫困框图来有效地表达两类家庭的贫困程度及其组成部分随时间变化的情况。在这两个图中，横轴表示总人口的百分比，它由一根垂直线分开，左半部分表示失业家庭的人口占总人口的百分比，右半部分表示就业家庭的人口占总人口的百分比。 [29] 纵轴表示贫困差距。对每类家庭（就业和失业的家庭），在各自的矩形的左下角画一个以贫困差距为高，贫困率为边的贫困框图 [30] 。同前面一样，对每类家庭，人口贫困程度可以用贫困框图面积的大小来表示。

[29] 横轴一般在 50% 处截断，因为超过这一点没有额外的信息。
[30] 由于某一子人口群的贫困率是在表示总人口百分比的横轴上表示，所以必须将子人口群的贫困率乘以子人口群占总人口的百分比，才能把它转化为在表示总人口百分比的横轴上所应观察到的子人口群的贫困率。

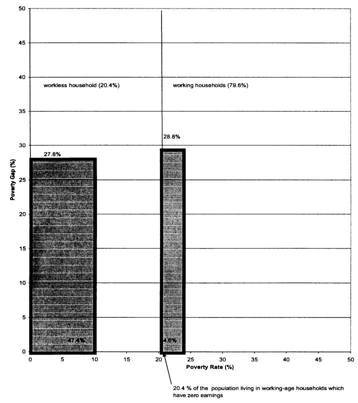


图 6. 英国适龄就业人口家庭和工作家庭的贫困框图： 1995

从图 5 和图 6 的比较可见，从 1974 年到 1995 年期间的总人口的贫困程度的上升可归结为如下因素：（ 1 ）各类家庭的人口的贫困框图的变化——有工作和没有工作的人口的贫困差距都加大了；失业人口贫困率下降了，但就业人口的贫困率却增加了；（ 2 ）失业人口的百分比上升了，而就业人口的百分比下降了。

图 5 中 1974 年的数据还表明在考虑总人口的贫困率时，各类家庭人口的相对百分比的重要性。在分析表 1 时，若忽视了各类家庭的人口的相对百分比，就很容易忽视如下事实，有工作但仍贫困的家庭的人口占总人口中的百分比为 2.7% $(= 2.8\% \times 95.3\%)$，它只比没有工作的贫困家庭的人口占总人口中的百分比稍低一点 $3.1\% (= 66.0\% \times 4.7\%)$。

图 5 和图 6 还表明，就业在决定总人口的贫困程度中的作用。虽然失业家庭的人口贫困率从 1974 年的 66.0% 降到 1995 年的 47.4%，失业家庭的人口百分比却上升得非常显著（从 1974 年的 4.7% 升到 1995 年的 20.4% ），以致于没有工作的贫困家庭的人口占拥有适龄就业人口的家庭总人口的百分比，从 1974 年的 $3.1\% (= 66.0\% \times 4.7\%)$ 上升到 1995 年的 $9.7\% (= 47.4\% \times 20.4\%)$。

这个实例表明，森的贫困指数的可分相乘性及其简单的几何解释对政策分析而言是有益的。

## 五、结　　语

在本文中，我们讨论了森有关贫困度量的公理化方法，指出了森的贫困指数所共同隐含的社会福利函数，并证明了森指数共有的可分相乘性质和其简单而直观的几何解释。森指数（ $S$ 和 $SST$ 指数）具有共有的基尼社会福利函数和可分相乘性结构，即这些指数可以分解成为贫困率、（平均）贫困差距率和贫困差距率的基尼指数加 1 三者的乘积：

$$(S\text{ 指数}) = (\text{贫困率}) \times (\text{贫困差距}) \times (1 + \text{穷人贫困差距的基尼指数})$$

和

$$(SST\text{指数}) = (\text{贫困率}) \times (\text{贫困差距}) \times (1 + \text{总人口贫困差距的基尼指数})$$

这一共有的可分乘积性，（1）使得这两个贫困指数更便于理解；（2）使得它们通过广为人知的贫困指标（贫困率和平均贫困差距率）和不平等程度指标（贫困差距比率的基尼指数）而更易于计算；（3）使得它们具有类似于基尼指数的几何解释，同时可分相乘性还可以使森指数便于线性化，并使得这些指数的百分比变化具有可分的可加性。

本文的结果表明，森的贫困指数的简化和图形化，使经济学家及政策制定者更容易理解森的贡献，从而能将这些经济理论的发现直接用于发达国家和发展中国家的政策分析之中。

## 参考文献


[1] Anand, S., *Inequality and Poverty in Malaysia: Measurement and Decomposition*, New York: Oxford University Press, 1983.

[2] Atkinson, A. B., "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, 1970, 2, 244–263.

[3] Bishop, J. A., J. P. Formby, and B. Zheng, "Statistical inference and the Sen index of poverty", *International Economic Review*, 1997, 38, 381–387.

[4] Blackorby, C. and D. Donaldson, "Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare", *Journal of Economic Theory*, 1978, 18, 59–80.

[5] Blackorby, C. and D. Donaldson, "Ethical indices for the measurement of poverty", *Econometrica*, 1980, 48, 1053–1060.

[6] Birdsall, N. and J. L. Londono, "Asset inequality matters: An assessment of the World Bank's approach to poverty reduction", *American Economic Review*, 1997, 87, 32–37.

[7] Bourguignon, F. and G. Fields, "Discontinuous losses from poverty, generalized measures, and optimal transfers to the poor", *Journal of Public Economics*, 1997, 63, 155–175.

[8] Chakravarty, S. R., "Ethically flexible measures of poverty", *Canadian Journal of Economics*, 1983, 16, 74–85.

[9] Chakravarty, S. R., *Ethical Index Numbers*, New York: Springer-Verlag, 1990.

[10] Chakravarty, S. R., "On Shorrocks' reinvestigation of the Sen poverty index", *Econometrica*, 1997, 65, 1241–1242.

[11] Chew, S. H., E. Karni, and Z. Safra, "Risk aversion in the theory of expected utility with rank dependent probabilities", *Journal of Economic Theory*, 1980, 42, 370–380.

[12] Clark, S., R. Hemming, and D. Ulph, "On indices for the measurement of poverty", *Economic Journal*, 1981, 91, 515–526.

[13] Dalton, H., "The measurement of inequality of income", *Economic Journal*, 1920, 20, 348–361.

[14] Donaldson, D. and J. A. Weymark, "Properties of population poverty indices", *International Economic Review*, 1986, 27, 667–688.

[15] Fei, J. C. H., G. Ranis, and S. W. Y. Kuo, "Growth and the family distribution of income by factor components", *Quarterly Journal of Economics*, 1978, 92, 17–53.

[16] Foster, J. E., "On economic poverty: A survey of aggregate measures", *Advances in Econometrics*, 1984, 3, 215–251.

[17] Foster, J. E., J. Greer, and E. Thorbecke, "A class of decomposable poverty measures", *Econometrica*, 1984, 52, 761–766.

[18] Foster, J. E. and A. K. Sen, "On economic inequality after a quarter century", In *On Economic Inequality*, Expanded edition with a substantial annexe by James E. Foster and Amartya Sen, A. K. Sen, Oxford: Clarendon Press, 1997.

[19] Jenkins, S. P. and P. J. Lambert, "Three 'I's of poverty curves, with an analysis of UK poverty trends", *Oxford Economic Papers*, 1997, 49, 317–327.

[20] Kolm, S. C., "The optimal production of social justice", In *Public Economics*, ed. J. Margolis and H. Guitton, London and New York: Macmillan, 1969.

[21] Myles, J. and G. Picot "Poverty indices and policy analysis", *Review of Income and Wealth*, 2000, 46, 161–179.

[22] Osberg, L. "Poverty in Canada and the USA: Measurement, trends and implications", *Canadian Journal of Economics*, 2000, 33, 847–877.

[23] Osberg, L. and K. Xu, "International comparison of poverty intensity: Index decomposition and bootstrap inference", *Department of Economics Working Paper*, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1997, 97–103.

[24] Osberg, L. and K. Xu, "Poverty intensity—How well do Canadian provinces compare?", *Canadian Public Policy*, 1999, 25(2), 1–17.

[25] Osberg, L. and K. Xu, "International comparison of poverty intensity: Index decomposition and bootstrap inference", *Journal of Human Resources*, 2000, 35, 51–81.

[26] Phipps, S., "Economics and the well-being of Canadian children", Innis Lecture, the Canadian Economics Association 33rd Annual Meeting, Toronto, Canada; *Canadian Journal of Economics*, 1999, 32, 1135–1163.

[27] Quiggin, J. "A theory of anticipated utility", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1982, 3, 323–343.

[28] Ravallion, M., D. van de Walle, and M. Gautam, "Testing a social safety net", *Journal of Public Economics*, 1995, 57, 175–199.

[29] Segal, U. and A. Spivak, "First order versus second order risk aversion", *Journal of Economic Theory*, 1990, 51, 111–125.

[30] Rongve, I., "Statistical inference for poverty indices with fixed poverty lines", *Applied Economics*, 1997, 29, 387–392.

[31] Sen, A.K., *On Economic Inequality*, Oxford: Clarendon Press, 1973.

[32] Sen, A.K., "Poverty: An ordinal approach to measurement", *Econometrica*, 1976, 44, 219–231.

[33] Sen, A. K., *Poverty and Famines: An Essay on Entitlement and Deprivation*, London: Oxford University Press, 1981.

[34] Sen, A.K., *On Economic Inequality*, Expanded edition with a substantial annexe by James E. Foster and Amartya Sen, Oxford: Clarendon Press, 1997.

[35] Shorrocks, A. F., "Revisiting the Sen poverty index", *Econometrica*, 1995, 63, 1225–1230.

[36] Takayama, N., "Poverty, income inequality and their Measures: Professor Sen's axiomatic approach reconsidered", *Econometrica*, 1979, 47, 747–759.

[37] Thon, D., "On measuring poverty", *Review of Income and Wealth*, 1979, 25, 429–440.

[38] Thon, D., "A poverty measure", *The Indian Economic Journal*, 1983, 30, 55–70.

[39] Xu, K., ' 'The statistical inference for the Sen-Shorrocks-Thon index of poverty intensity", *Journal of Income Distribution*, 1998, 8, 143–152.

[40] Xu, K. and L. Osberg, "A distribution-free test for deprivation dominance", *Econometric Reviews*, 1998, 17, 415–429.

[41] Xu, K. and L. Osberg, "An anatomy of the Sen and Sen-Shorrocks-Thon indices, multiplicative decomposability and its subgroup decompositions", Working Paper, No. 99–05, Department of Economics, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1999.

[42] Xu, K. and L. Osberg, "How to decompose the Sen-Shorrocks-Thon poverty index? A practitioner's guide", *Journal of Income Distribution*, 2001a, forthcoming.

[43] Xu, K. and L. Osberg "The social welfare implications, decomposability, and geometry of the Sen family of poverty indices", *Canadian Journal of Economics*, 2001b, forthcoming.

[44] Yaari, M., "The due theory of choice under risk", *Econometrica*, 1987, 55, 95–105.

[45] Zheng, B., "Aggregate poverty measures", *Journal of Economic Survey*, 1997, 11 (2), 123–162.

## On Sen's Approach to Poverty Measures and Recent Developments

Kuan Xu and Lars Osberg

(*Dalhousie University*)

**Abstract:** In this paper we discuss the axiomatic approach to poverty measure and propose a unified framework for the Sen indices of poverty intensity which shows an explicit connection between the indices and their common underlying social evaluation function. we also identify the common multiplicative decomposition of the indices that allows simple and similar geometric interpretations and easy numerical computation. These results are easy to understand and useful to policy makers in both developed and developing countries.

**JEL classification:** C00, H00, O15